BEVEZETÉS

Előadás célja:

→ fizikai-kémiai mérések kiértékelése (jegyzőkönyv elkészítése)

→ mérési eredmények pontossága
→ hibaszámítás
(→ közvetlen elvi segítség)

→ mérési technikák megismerése

→ alapvető fizikai mennyiségek
→ spektroszkópiai mérések
→ elektrokémiai mérések

Mai előkészítő: → mérési eredmények statisztikai vizsgálata
→ alapvető mérési technikák: hőmérséklet mérése

KÍSÉRLET – MÉRÉS FOGALMA

XVI. sz. vége – XVII. sz. eleje Galilei munkássága →

→ tudományos megismerés alappillérei:
→ tapasztalat
→ kísérlet
→ logikus következtetés

→ kombinálásukkal érhetjük el a tudományos gondolkodás alapvető célját:
MODELLALKOTÁS

→ modell: olyan alkotás, mely képes az adott jelenség viselkedését, lefolyását szimulálni, majd a modell megfigyelése által a jelenségről új ismereteket közvetíteni.

→ fizikai v. matematikai modell

→ modellalkotás legfontosabb része a KÍSÉRLET (tapasztalat nem elég…)

→ KÍSÉRLET: olyan tapasztalati eljárás, mely a természet jelenségeinek megismerésére irányul. A kísérlet egy jelenség szándékos előidézése megfigyelés céljából.

→ Előnyei puszta megfigyeléssel szemben: helye, ideje, körülményei megválaszthatók)
Csoportosítása: rendszeres megfigyelés, előkísérlet, bizonyító kísérlet

→Kísérleteket meg kell tervezni (függ persze a kísérlet fajtájától)
Alapvető problémák:
→ kérdésfeltevés
→ kísérletek számának optimális elrendezése
→ kísérleti körülmények megválasztása (reprodukálhatóság biztosítása, eszközök megválasztása, adatrögzítés, kiértékelés módja)

Közbevetés: kísérleti eredmények rögzítése

→ kísérleti jegyzőkönyv
→ számítógépes adatgyűjtés → később

jegyzőkönyv vezetése

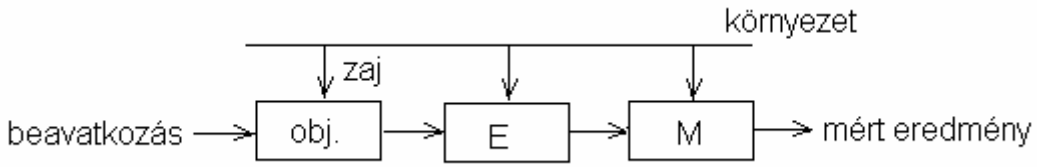
→ reprodukálható legyen
→ méréssel egy időben
→ nem mérési leírás
→ nem egy érték leolvasása

→ Speciális kísérlet a mérés.

→ MÉRÉS: olyan kísérlet, melyben valamely objektumra valamilyen hatást gyakorolunk, s vizsgáljuk az objektum válaszát valamely fizikai mennyiség mérőszámának meghatározása által. A feladat tehát valamely fizikai mennyiség mérőszámának meghatározása.

MÉRÉS

→ Vázlatosan:



→ É: érzékelő
M: mérőműszer

→ É.: kvantitatív információ szerzése az objektumról, majd annak továbbítása a mérőműszerbe

→ É.: mért paraméterek jellege alapján

Fizikai érzékelők: pl. nyomás
Kémiai érzékelők: pl. pH
Biológiai (glükóz, enzim) érzékelők

→ M: gyakorlati megvalósítás tekintetében: A(nalóg) és D(igitális)

Analóg: a jelet folytonosan változó jellé (mutatókitéréssé) alakítja!
Digitális: kvantálás → diszkrét, a jelet véges értékkészletű mennyiségé alakítja AD konverter segítségével.

→ M: fő jellemzői:

→ érzékenység (mérendő mennyiség egységnyi változása, hány skálarész változást okoz) (D esetben: berendezés felbontása!)
→ mérési tartomány, méréshatár: mért mennyiség legkisebb és legnagyobb kijelezhető értéke
→ pontosság: az eredmény valódi értékétől való eltérése
→ műszer belső ellenállása: feszültségmérők esetén

→ Figyelem: mérő személy is jelen van (beavatkozás, adatrögzítés, feldolgozás)

→ Mért eredmény: mérendő eredmény

$$x = \{x\} \quad [x]$$

mérőszám mértékegység

Így kell a jegyzőkönyvbe rögzíteni!

→ É és M X-et Y jellé alakítja → Y mérőszáma mérhető
→ Y-hoz tudnunk kell milyen X jel tartozik!

→ ez a bemenőjel-kimenőjel kapcsolat: az átviteli függvény

→ átviteli függvény meghatározása: kalibráció
(megjegyzés: szeretjük a lineáris fv-t…)

MÉRÉSI EREDMÉNYEK PONTOSSÁGÁNAK JELLEMZÉSE

Mérés végrehajtása → mérési eredmények értelmezése → kiértékelése

Legfontosabb kérdés: pontosak-e az eredmények, és hogyan jellemezzük a pontosságot?

Miért nem pontos?

A külvilág nehezen figyelembe vehető, állandóan változó hatást gyakorol a vizsgált objektumra, a mérőberendezésre, s befolyásolja az észlelt eredményt. Ez a behatás a ZAJ.

A zaj következménye: a HIBA

Fajtái: → szisztematikus hiba (az eredményt egy irányban befolyásolják)

- állandó (egy additív tagként jelenik meg)
- változó

Oka: kísérleti berendezés elemei meghibásodása, eljárási hiba.

→ véletlen hibák: nem rendszeresen, nem meghatározott irányban lépnek fel.

A hibák miatt (zaj következményeként) a mérési eredményeket csak statisztikai módszerekkel lehet kielégítően értelmezni. Csak a véletlen hibák jellemzésre alkalmazható!

↓

Ehhez kell egy fontos feltevés:

Mérési eredményeinket valószínűségi változóként kezeljük!

↓

amint ezt kimondtuk már vizsgálhatjuk is a valószínűségi változókat, s alkalmazhatjuk a valószínűségi változókkal kapcsolatos statisztikai ismereteinket a mérési pontosság jellemzésére!

A MÉRÉS ÉS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

Valószínűségi változó (ξ)

Az elemi események halmazán (eseménytéren) értelmezett függvény, melynél minden egyes elemi eseményhez hozzárendelünk egy valós számot. → ez a valószínűségi változó egy lehetséges értéke.

Pl. → kockafeldobás

Tulajdonságai:

→ folytonos vs. diszkrét
→ sűrűség függvény (annak a valószínűsége, hogy ξ egy adott A intervallum értékeit veszi fel $\int_A f(x)dx$)
→ eloszlás függvény
→ várható értéke ($\mu = E(\xi)$)
→ variancia ($\sigma^2 = E\{(\xi - \mu)^2\}$) → gyöke: standard deviáció

Néhány valószínűségi eloszlás:

Általában: ha ξ-nek „ilyen és ilyen" a sűrűség fv.-e, akkor „ilyen és ilyen" eloszlású valószínűségi változónak nevezzük.

→ binomiális (diszkrét): kockafeldobás

→ Poisson (diszkrét): radioaktív bomló részecskék száma egységnyi t alatt

→ exponenciális eloszlás (folytonos ξ-re): radioaktív anyagok élettartama

→ normális eloszlás (folytonos ξ-re):

↓

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{1/2} - \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2$$

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$E(\xi) = \mu \qquad V(\xi) = \sigma^2$$

(μ és σ^2 a sűrűség függvény paraméterei)

A központi határeloszlás tétele

Mi történik mérés során?

mérek $\xi_1 \to x_1$ realizációját mérem
mérek $\xi_2 \to x_2$ realizációját mérem
:
:
mérek $\xi_n \to x_n$ realizációját mérem

De nem ismerem μ-t, σ-t

Definiálunk két új valószínűségi változót:

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_i \xi_i}{n} \text{ (minta átlaga)}$$

$$S^2 = S^2(\xi) = \sum_i (\xi_i - \bar{\xi})^2/(n-1) \text{ (minta varianciája)}$$

Megmutatható:

$$E(\bar{\xi}) = \mu = \mathrm{E}(\xi_i) \qquad E(S^2) = \sigma^2$$

$$\mathrm{V}(\bar{\xi}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\bar{\xi}$ egy realizációja $\bar{x}$: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

S^2 egy realizációja s^2: $S^2 = S^2(\xi) = \sum_i (\xi_i - \bar{\xi})^2/(n-1)$

Egy becslését adják μ-nek és σ^2-nek!!!

Lefordítva: n mérés átlaga és varianciája az eredeti eloszlás várható értékének és varianciájának torzítatlan becslését adja!!!

Mégis $\bar{\xi}$ milyen eloszlású lesz?

Erre ad támpontot a központi határeloszlás tétele:

Ha $\xi_1 \ldots \xi_n$ val. változók eloszlása azonos (μ, σ^2), akkor $\sum \xi_i$ eloszlása NORMÁLIS eloszlás lesz, így $\bar{\xi}$ eloszlás $N(\mu, \sigma^2/n)$ lesz! (ha $n \to \infty$)

Ez adja a normális eloszlás jelentőségét → ismételt méréseknél a kinyerhető statisztikai információ egy normális eloszlás paramétereinek torzítatlan becslését szolgáltatja!

Ezek szerint, ha van egy tömegmérésem, pl. m_1, m_2…m_n tömegekkel akkor $(m_1+m_2+\ldots+m_n)/n = \overline{m}$ a várható érték becslése lesz, míg az $\sum_i (m_i - \overline{m})^2/(n-1)$ adja S^2 valószínűségi változó s^2 becslését.

Mit mondhatunk $\overline{m}$ -ról? Mennyire közelít $E(m_i)$-t?

Erre a becsléselmélet adja meg a választ a konfidencia intervallum definíciójával.

A konfidencia intervallum

→A becsléselméletben definiálunk $\overline{m}$ körül egy intervallumot, mely bizonyos bizonyossági szinttel (80, 90, 95 %) tartalmazza $E(m_i)$ valódi értéket. Ezt nevezzük konfidencia intervallumnak.

Definíciója: $\overline{m} \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2} \cdot s(\overline{x}) = \overline{m} \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{n^{1/2}}$

$t_{n-1}^{1-\alpha/2}$: a Student-féle *t*-eloszlás kritikus értékei *n*-1 szabadsági fokra és (1-α/2) bizonyossági szinthez.

Más (közismert) neve: hibahatár.

A hibahatár nyújt segítséget az értékes jegyek számának eldöntésében.

Értékes jegyek

Szabályok:

1) nem nulla egészek: pl. 123 vagy 124,5

2) nullák → 3 típus
   a) vezető nullák → 0,0025 → nem értékesek
   b) bezárt nullák → 250014 → értékesek
   c) záró nullák
      értékes jegyek, ha a szám tartalmaz tizedesvesszőt!

$1.00 \cdot 10^2$	3 értékes jegy
100	1 értékes jegy
100.	3 értékes jegy

3) Pontos számok → ∞ értékesnek tételezzük.
   Pl. π, vagy a 2 a $K = 2\pi \cdot r$ összefüggésben

Értékes jegyek matematikai műveletekben:

a) osztás, szorzás: az eredmény értékes jegyeinek számát a műveletben résztvevő azon szám határozza meg, melynek legkevesebb értékes jegye van.
   $4{,}56 \cdot 1{,}4 = 6{,}4$
b) összeadás, kivonás: *a tizedes vessző* helyét a legkisebb pontosságú szám határozza meg

$$12{,}11 + \underline{18{,}0} + 1{,}013 = \underline{31{,}1}$$

Értékes jegyek mérésekben: a mérési pontosság határozza meg

→ digitális műszereknél az utolsó kijelzett számjegy
   24.17 mV → 4 db
→ analóg műszereknél két beosztás között az utolsó megbecsült érték. Tizedes beosztású hőmérőnél:
   17.23 °C → 4 db
   17.30 °C → 4 db → ki kell tenni a 0-t!

Mérés kiértékelés során hogyan adjuk meg a pontosságot?

→ ha nincs hibaszámítás → elvégezzük a matematikai műveletek sorát → levágás nélkül → a legpontosabb számnál 1-2 jeggyel többet megtartva, s a végén a legkisebb pontossághoz igazítjuk az eredményt!

→ ha van hibaszámítás (konfidencia intervallum) → azaz alkalmazható a statisztika → ugyanúgy mint előbb → 1-2 jeggyel több megtartása a részműveleteknél → kiszámítjuk a konfidencia intervallumot, hibahatárt → ezt 1-2 értékes jegyre adjuk meg → ehhez igazítjuk a mért eredmény utolsó helyi értékét! Így adjuk meg a végeredményt!

→ pl. tömegmérés → eredmény megadása

(2,406±0,025) g vagy (2,41±0,03) g

A Gauss-féle hibaterjedés

A hibaterjedés is a becslés elmélet alapján vezethető le.

Van például egy függvény ami egymástól független Θ_1, Θ_2, … Θ_r változók függvénye, s ezeket a változókat mi T_1, T_2 … T_r valószínűségi változókkal becsüljük.

A függvény varianciája:

$$V(\phi(T_1, T_2 ... T_v) = \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Theta_i} \right)^2 V(T_i) + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Theta_i} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Theta_j} \right)_j C(T_i, T_j)$$

$C(T_i, T_j)$: a kovariancia

Praktikusabb eset → mérjünk egy fizikai mennyiséget (Θ), becsüljük az átlagát (ζ) standard deviációját (s_i) (→ ezt egyébként standard hibának is szokás nevezni!)

Ha a függvény valamely függvénye (Θ)-nak, akkor a végső hiba:

$$V(\phi(T)) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \Theta} \right)^2 \cdot V(T) = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \Theta} \right)^2 \cdot s_{\bar{T}}^2 \right]$$

$\phi(T) \Rightarrow \phi(\Theta)$ becslése

Még inkább leegyszerűsítve: $y = f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ x_1, x_2, x_3 … mért mennyiségek

$$\Delta y = \left(\sum_i \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \cdot s_{xi} \right]^2 \right)^{1/2}$$ ha a változók függetlenek

Példa a hibaterjedésre: tömegkülönbség mérése

$m_1, m_2 \rightarrow f(m_1, m_2) = m_1 - m_2 = y$

$$s_y = \Delta y = \left[\left(\frac{\partial (m_1 - m_2)}{\partial m_1} \cdot s_{m1} \right)^2 + \left(\left(\frac{\partial (m_1 - m_2)}{\partial m_1} \right) s_{m2} \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{s_{m_1}{}^2 + s_{m_2}{}^2}$$