Integrális szórási egyenlet II.

Alapösszefüggések

$$\rightarrow \qquad \nabla r = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \Theta}\hat{\Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \right) r = \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

vagy

r = x**i** + y**j** + z**k** (Descartes)

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x} i + \frac{\partial r}{\partial y} j + \frac{\partial r}{\partial z} k = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Mj.: $\frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{r}$ vektor-vektor függvény: a tér minden egyes pontjához egy $\hat{r}$ egységvektor van rendelve.

$$\rightarrow \nabla \frac{1}{r} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \cdot \frac{1}{r} \right)\hat{\Theta} + \ldots \right) = -\frac{1}{r^2}\hat{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\rightarrow \nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\mathrm{r} \cdot \nabla\mathbf{r} - \mathbf{r}\nabla \mathrm{r}}{\mathrm{r}^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r}$$

(ui. elemi differenciálási szabályok érvényesek a ∇ operátorra is!)

Részenként:

$$\mathbf{r} \cdot \nabla r = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = r$$

$$\nabla \mathbf{r} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 3$$

$$r \cdot \nabla \mathbf{r} = 3r$$

→ Összefoglalva: $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ vektor

$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ vektor

$\nabla \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}$ skalár

$\nabla \mathbf{r} = 3$ skalár

Mj.: *r* egy fv., ami az (*r*, Θ, φ) pontoknál *r* értékét veszi fel!

$\Delta \frac{1}{r}$ KIFEJEZÉSE

$$\rightarrow \nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{r^3 \cdot \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \nabla r^3}{r^6}$$

$$r^3 \nabla \mathbf{r} = 3r^3$$

$$\nabla r^3 = \nabla \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} = \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k})$$

$$\nabla r^3 = 3r \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} \cdot 3r\mathbf{r} = 3r^3$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

kivéve talán <u>$r = 0$-ban!</u>

Szemléltetés: elektrosztatika I. Maxwell törvénye

$\nabla \mathbf{E} = div\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$, (Gauss tételből, töltésmegmaradás!)

E: elektromos térerősség

$\rho(\mathbf{r})$: töltéssűrűség

ε_0: vákuum permittivítása

Tudjuk:

$\mathbf{E} = -\nabla U$ — U: elektrosztatikus potenciál

$\Delta U = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ — (Poisson egyenlet)

Legyen:

$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ — egy elektromos ponttöltésre

$$\downarrow$$

$\Delta U = \Delta \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{q \cdot \delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ ← töltéssűrűség

Így a sejtésünk:

$$\Delta \cdot \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

Elemi bizonyítás

(ált. bizonyítás: matematikai eloszlás elmélet)

$\Downarrow$

$\frac{1}{r}$ ha r > ε (azaz **r** kívül van egy az

origóra centrált S_ε gömbön)

Legyen g_ε(**r**) =

olyan értékeket vesz fel a gömbön belül, hogy a

függvény „szabályosan” viselkedjen →
folytonos, differenciálható legyen.

Keressük:

$$I(\varepsilon) = \int d^3r f(\mathbf{r}) \Delta g_\varepsilon(\mathbf{r})$$ integrál határértéket ha ε → 0

Hozzájárulás csak a gömbön belülről jön (azon kívül ui. $\Delta \frac{1}{r} = 0$)

$$I(\varepsilon) = \int_{r \leq \varepsilon} d^3r f(\mathbf{r}) \Delta g_\varepsilon(\mathbf{r})$$

ε-t olyan kicsire választom, hogy *f*(**r**) variációja S_ε-n belül elhanyagolható legyen

$$I(\varepsilon) \cong f(0) \int_{r \leq \varepsilon} d^3r \Delta g_\varepsilon(\mathbf{r}) \quad (\Delta g_\varepsilon(\mathbf{r}) = \nabla(\nabla g_\varepsilon(\mathbf{r})))$$

S_ε-t körülvevő felületi integrállá alakítjuk (F_ε-ra) – Gauss-tétel

$$I(\varepsilon) \approx f(0) \int_{F_\varepsilon} \nabla g_\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{n} dF \qquad (\int \mathbf{C}\mathbf{n} dA = \int \nabla \mathbf{C} dV)$$

→ g_ε(**r**) függvény gradiense felületi integrálja…

$g_\varepsilon(\mathbf{r})$ folytonos a felszínen (ezenkívül $\frac{1}{r}$-rel egyenlő)

$$\left[\nabla g_\varepsilon(\mathbf{r})\right]_{r=\varepsilon} = \left[-\frac{1}{r^2}\right]_{r=\varepsilon}\hat{r} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\hat{r} \qquad \left(\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{r}\right) \qquad \rightarrow$$

$$I(\varepsilon) \approx f(0)\cdot 4\pi\varepsilon^2 \cdot \left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\right] \approx -4\pi f(o)$$

(mivel $\hat{r}$ és **n** egyirányú)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^3r \Delta g_\varepsilon(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = -4\pi f(0)$$

Dirac delta definíciójából:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta g_\varepsilon(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

Q.E.D.