Integrális szórási egyenlet III.

Stacionárius szórási egyenlet beépítése

Legyen $\varphi_0(r) = e^{ikz}$ és $G_+(\mathbf{r})$ a $G(\mathbf{r})$!

$\Downarrow$

Vegyük észre:

$$(\Delta + k^2)\mathrm{e}^{ikz} = ikik\mathrm{e}^{ikz} + k^2\mathrm{e}^{ikz} = 0$$

$\Downarrow$

$$v_k(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \int d^3r' G_+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')v_k(\mathbf{r}')$$

Ez egy olyan integrális egyenlet amely magába foglalja az aszimptotikus viselkedést is!

Fejezzük ki $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$-t:

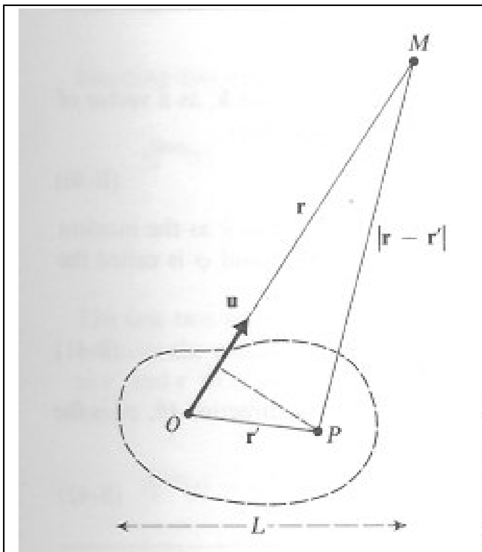

FIGURE 5

Approximate calculation of the distance $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ between a point M very far from O and a point P situated in the zone of influence of the potential (the dimensions of this zone of influence are of the order of L).

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{u}\mathbf{r}'$ ($\mathbf{u}$ az $\mathbf{r}$ irányba mutató egységvektor) mivel OMP szög kicsi!

$\Downarrow$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx$ MP vetülete MO-ra

$$G_+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underset{r\to\infty}{\sim} -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cdot e^{-ik\,\mathbf{u}\,\mathbf{r}'}$$

Visszahelyettesítve megkapjuk az aszimptotikus viselkedést is (ld. intuitív út!).

$$\Downarrow$$

Szórási amplitúdó

$$f_k(\Theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik\,\mathbf{u}\,\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') v_k(\mathbf{r}')$$

Born-sorfejtés

Integrális szórási egyenlet

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot U(\mathbf{r}') \cdot \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

<u>Probléma</u>: integrálban nem ismerjük $\Phi(\mathbf{r}')$ -t!

Iteratív megoldás (kombinálva egy egyszerű változócserével)

$$\Phi(\mathbf{r}') = \Phi_0(\mathbf{r}') + \int G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot U(\mathbf{r}'') \cdot \Phi(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}''$$

Behelyettesítve $\Phi(\mathbf{r}')$ -t a fenti egyenletbe:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot U(\mathbf{r}') \cdot \Phi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \\ + \iint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot U(\mathbf{r}') \cdot G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot U(\mathbf{r}'') \cdot \Phi(\mathbf{r}'') \cdot d\mathbf{r}' d\mathbf{r}''$$

Már ismert az első két tag!!!

$\Phi(\mathbf{r})$ Born sorfejtése (szimbolikusan):

$$\Phi = \Phi^\circ + GU\Phi \Rightarrow \Phi = \Phi^\circ + GU\Phi^\circ + GUGU\Phi \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi = \Phi^\circ + GU\Phi^\circ + GUGU\Phi^\circ + \ldots$$

A potenciál egyre magasabb hatványai szerepelnek a sorfejtésben $\Rightarrow$ gyenge potenciálnál konvergencia gyors!

Eredmény első-rendben: Born-közelítés

Behelyettesítve $f_k(\Theta, \varphi)$ egyenletébe $v_k(\mathbf{r}')$-t:

Fontos közbevetés:

$$e^{ikz} = e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} \quad \text{(definíció miatt, ugyanígy: } k_d\text{)}$$

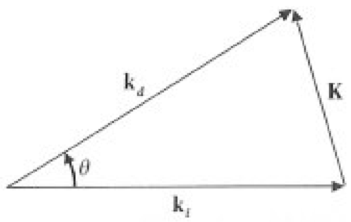

FIGURE 6

Incident wave vector $\mathbf{k}_i$, scattered wave vector $\mathbf{k}_d$ and transferred wave vector $\mathbf{K}$.

$$v_k(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \int -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{ur}'} U(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' = e^{ikz} + \left(-\frac{1}{4\pi}\int e^{-ik\mathbf{ur}'} U(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}'} d\mathbf{r}'\right)\cdot\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\begin{aligned}
f_k^B(\Theta,\varphi) &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' e^{-ik\mathbf{ur}'} U(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}'} = \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' e^{-i(\mathbf{k}_d-\mathbf{k}_i)\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') = \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \\
&\qquad\Downarrow
\end{aligned}$$

<u>Potenciál Fourier-transzformáltja!!!</u>

Differenciális szórási hatáskeresztmetszet:

$$I^B(\Theta,\varphi) = \frac{\mu^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int d^3r e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} V(\mathbf{r})\right|^2$$

K függ Θ, φ-től és k-től (energiától!) $\Rightarrow$ I vizsgálatával (Θ, φ v. k változtatásával) a potenciálról kaphatunk információt!

Born-közelítés: szemléltetés

$$\Phi = e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} + \int d^3r' G_+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot U(\mathbf{r}')\cdot e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}'}$$
$$+ \int d^3r' \int d^3r'' G_+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot U(\mathbf{r}')\cdot G_+(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\cdot U(\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}''}$$

Φ első két tagja

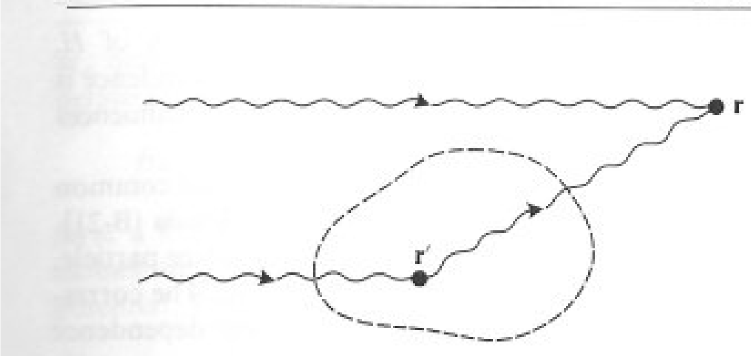

FIGURE 7

Schematic representation of the Born approximation: we only consider the incident wave and the waves scattered by one interaction with the potential.

$G_+(r-r') \longrightarrow$ **r** pontban az **r**' pontban lévő forrás által sugárzott hullám amplitúdója

$U \longrightarrow$ szóró médium sűrűsége

Φ következő tagja

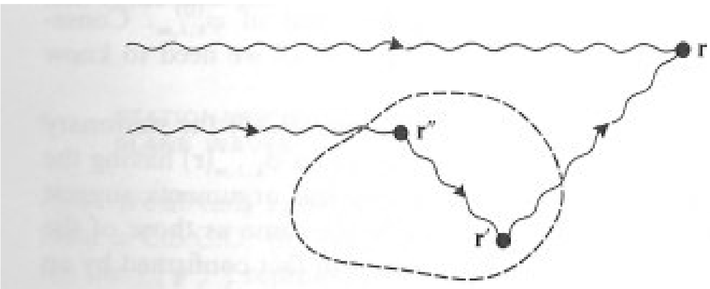

FIGURE 8

Schematic representation of the second-order term in U in the Born expansion: here we consider waves which are scattered twice by the potential.

Vigyázat: továbbra is egyszeres szórásról van szó …

Born-közelítés: Yukawa potenciál

Határozzuk meg a differenciális hatáskeresztmetszetet a Yukawa potenciálra (elemi részecskék kölcsönhatásának leírására vezették be, magerők leírására alkalmazzák: Π-mezonok megjóslása következett belőle…):

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \cdot \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

Kell három ismert integrál-összefüggés:

I)
$$\int_{-1}^{1} e^{ib\cos\Theta} d\cos\Theta = \left[\frac{1}{ib} e^{ib\cos\Theta}\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{e^{ib}}{ib} - \frac{e^{-ib}}{ib} = \frac{2i\sin b}{ib} = \frac{2\sin b}{b}$$

II)
$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

III)
$$\left|k_i - k_d\right| = 2k \sin\frac{1}{2}\Theta$$

$$f_k(\Theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\mu \cdot V_0}{\hbar^2}\right)\int e^{-ik\,\mathbf{u}\,\mathbf{r}'} \cdot \frac{e^{-\alpha r'}}{r'} e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}'} \cdot d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\mu \cdot V_0}{\hbar^2}\right)\int \frac{e^{-\alpha r'}}{r'} \cdot e^{i(\mathbf{k}_i - k\mathbf{u})\mathbf{r}'} \cdot d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2\mu \cdot V_0}{\hbar^2}\right)\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha r'}}{r'} \cdot e^{i|\mathbf{k}_i - k\mathbf{u}| r' \cdot \cos\Theta'} r'^2\, dr'\, d\cos\Theta'\, d\varphi' =$$

$$= -\frac{2\mu \cdot V_0}{\hbar^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha r'}}{r'} \cdot \frac{\sin|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d| r'}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d| r'} r'^2\, dr' =$$

$$= \left(-\frac{2\mu \cdot V_0}{\hbar^2}\right)\frac{1}{\alpha^2 + |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d|^2} =$$

$$f_k(\Theta,\varphi) = -\frac{\dfrac{2\mu \cdot V_0}{\hbar^2}}{\alpha^2 + 4k^2 \sin^2 \dfrac{1}{2}\Theta}$$

$$I(\Theta,\varphi) = |f_k(\Theta,\varphi)|^2$$

Vegyük észre:

a) $I_k^B(\Theta,\varphi) = \ldots$ ha k $\rightarrow$ 0

b) I^B maximuma Θ = 0-nál van és monoton csökken $\Theta = \pi$-ig!

c) Θ = 0-nál nincs divergencia!