Rugalmas ütközések dinamikája 2.

Kvantitatív tárgyalás – kiindulási pontok

- Newton II. (szerkezet nélküli részecskékre)

$$m_1 \frac{d^2 \underline{R}_1}{dt^2} = F(R)\hat{\underline{R}} \qquad m_2 \frac{d^2 \underline{R}_2}{dt^2} = -F(R)\hat{\underline{R}}$$

$\hat{\underline{R}}$: egységvektor a két részecskét összekötő egyenes mentén.

- relatív elhelyezkedéssel:

$$\frac{d^2 \underline{R}}{dt^2} = \frac{1}{\mu} F(R)\hat{\underline{R}}$$

$$\frac{d^2 \underline{R}_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} F(R)\hat{\underline{R}} \qquad \frac{d^2 \underline{R}_2}{dt^2} = -\frac{1}{m^2} F(R)\hat{\underline{R}}$$

$$\frac{d^2 (\underline{R}_1 - \underline{R}_2)}{dt^2} = \frac{d^2 \underline{R}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F(R)\hat{\underline{R}}$$

$$\frac{d^2 \underline{R}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} F(R)\hat{\underline{R}} = \frac{1}{\mu} F(R)\hat{\underline{R}}$$

- Newton: impulzusnyomaték állandó (ld. bolygók)

$$\underline{L} = \underline{R} \times \mu \dot{\underline{R}} \qquad (\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p})$$

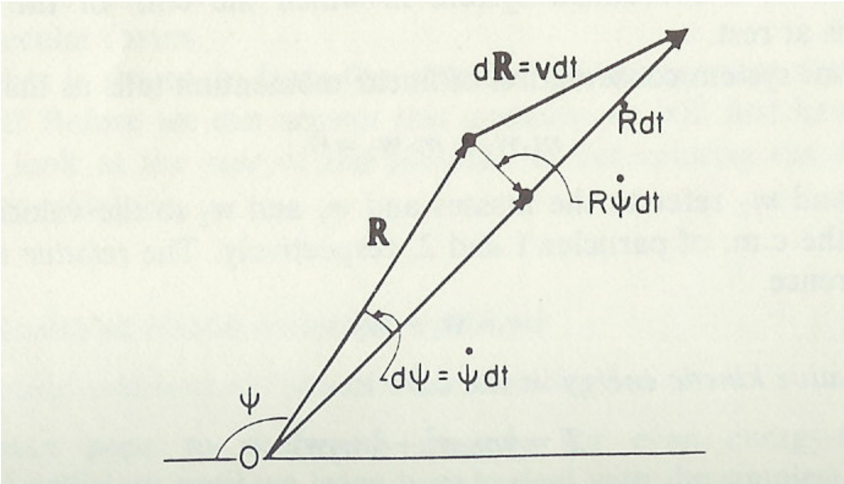
$$\dot{\underline{L}} = \dot{\underline{R}} \times \mu \dot{\underline{R}} + \underline{R} \times \mu \ddot{\underline{R}} = 0$$

$\Rightarrow$Vektorok párhuzamosak!
$\Rightarrow$ ez nem más, mint a forgatónyomaték!

- $\underline{L}$ állandó (iránya és nagysága)$\Rightarrow$ részecskék mozgása egy síkra korlátozott! $\Rightarrow$ R és φ elégséges a trajektória leírásához!

- $\underline{L}$ megmaradása $\Rightarrow$ kapcsolat R(t), φ(t) és b között! Ez a CÉL!

$\underline{R}$ megváltozásának felbontása komponenseire



$$d\underline{R} = \underline{v}dt$$
$$\underline{v}dt = \underline{R}(t+dt) - \underline{R}(t)$$

d$\underline{R}$ felbontása: $\underline{R}d\varphi = \underline{R}\dot{\varphi}dt$ (tangenciális rész)

$\dot{\underline{R}}dt$ (radiális rész)

- $\underline{L}$ ütközés előtt (nagy távolság, nincs kölcsönhatás):

$$\underline{L} = \mu\underline{v}\times\underline{b}'$$ (kezd. seb., relatív vektor)

$$L = \mu vb \quad \left(|\underline{L}| = L = a\cdot b\cdot\sin\alpha\right)$$

b: hatásparaméter

- $\underline{L}$ ütközés alatt:

$$\underline{L} = \mu\dot{\underline{R}}\times\underline{R}$$

$\dot{\underline{R}}$ vektor $\underline{R}$-re merőleges komponense: $R\dot{\varphi}$

$$\Downarrow$$

$$L = \mu R^2\dot{\varphi}$$

- Fontos eredmény:

$$\mu R^2\dot{\varphi} = \mu vb \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{vb}{R^2}$$

Kvantummechanikai diszkusszió

- kvantummechanikában $\hat{L}^2$ sajátértékei diszkrétek, így $\underline{L}$ hossza is diszkrét:

$$L = [l(l+1)]^{1/2}\hbar, \text{ ahol } l = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

- Klasszikus approximáció kezelése

$$b = \frac{L}{\mu v} = \frac{[l(l+1)]^{1/2}\hbar}{\mu v} \quad \text{vagy} \quad b \approx \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)}{k} \quad \text{ahol}$$

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\mu v}{\hbar}$: de Broglie hullámszám

Ha μ nagy, *v* normális $\rightarrow$ λ kicsi (relatíve *d*-hez és *b*-hez képest)

ezért $\dfrac{2\pi}{\lambda} \cdot d >> 1$,azaz $kd>>1$, $kb>>1$

$\Downarrow$

l nagy lesz ($\rightarrow$ később kvantumos kezelés)

$\Downarrow$

klasszikus kezelés OK

Megjegyzés: Bohr-féle korrespondencia-elv szerint nagy *l*-ekre klasszikus közelítés megfelelő lehet!

Centrifugális gát

A relatív mozgás kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2}\mu \cdot \dot{R}^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2)$$

(radiális + centrifugális k. e.)

Emlékeztető: $\underline{\dot{R}} = R \cdot \dot{\varphi} \cdot \underline{\hat{r}}_t + \dot{R} \cdot \underline{\hat{r}}_r$

Legyen $\underline{v}$ a kezdeti sebesség (ütközés előtt):

$$E_T = \frac{\mu v^2}{2} \quad \text{(teljes energia!)}$$

Mivel $\dot{\varphi} = \dfrac{bv}{R^2}$

$$\Downarrow$$

$$(R\dot{\varphi})^2 = \frac{b^2 v^2}{R^2}, \text{ így}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}\mu(R\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}\mu v^2 \frac{b^2}{R^2} = E_T \frac{b^2}{R^2}$$

centrifugális kinetikus energia

$$\Downarrow$$

A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 + E_T \frac{b^2}{R^2}$$

- ha a potenciális energia: $V(R) \neq 0$ (ütközés alatt)

$$E_T = T + V(R) = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 + E_T \frac{b^2}{R^2} + V(R)$$

Effektív potenciál:

$$E_T \frac{b^2}{R^2} + V(R) = V_{eff}(R)$$

$V_{eff}(R) \Rightarrow$ centrifugális kinetikus energia $\Rightarrow$ taszító potenciál hozzájárulás! $\Rightarrow$ centrifugális gát! $\Rightarrow$ Eredete: részecskék közlekedése $\Rightarrow$ radiális kinetikus energia csökken $\Rightarrow$ centrifugális energia nő

Ekvivalens értelmezés

$$E_T = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 + E_T \frac{b^2}{R^2} + V(R) \qquad\qquad E_T\left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 + V(R)$$

effektív kinetikus energia

Klasszikus fordulópont, $\underline{R}_0$ (minimális távolság)

$$E_T = V(R_0) + E_T \frac{b^2}{R_0^2}$$

egyenlet alapján számítható $\left(T = 0 = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2\right)$.

- merev gömbi modellre:

$R_0 = b$, ha $b > d$
$R_0 = d$, ha $b \le d$

- realisztikus potenciálokra: $R_0 = R_0(b, E_T)$

Ütközési hatáskeresztmetszet

(szerk. nélküli részecskék rugalmas ütközése)

Azt a (kezdeti sebességvektor irányára merőleges) effektív felületet akarjuk meghatározni, melyen belül ha érkezik a belőtt részecske, ütközés történik. Legkézenfekvőbb a hatás paraméter segítségével meghatározni ezen felület nagyságát.

Vegyünk olyan b-t, melynél történik ütközés, majd számoljuk ki annak a felületnek a nagyságát, melyeken b és b+db ütközési paraméterek közé eső paraméterekkel rendelkező * áthaladnak.

- b és b+db közötti ütközési paraméterekkel:

$$d\sigma = 2\pi \cdot bdb$$

körgyűrű területe (mivel szimmetrikus a probléma)

Integrálás mindazokra a *b*-kre, melyek ütközéshez vezetnek…

$$\sigma = \int 2\pi \cdot bdb \qquad \left(\sigma = \frac{1}{\lambda n_B}\right)$$

Alsó határ: 0

Felső határ: ∞ (?) kvantummechanika meg fogja mondani!

Merev gömbi modellre

$$\sigma = \int_o^d 2\pi \cdot bdb = \pi d^2$$

(Mj: - tulajdonképpen a kör „területére” való integrálás…

- a tévedés csak az integrálás felső határában van $\rightarrow$ bizonytalansági elv vezet majd véges σ-hoz!!!)