

Szórás-elmélet

Az ütközési dinamika kísérleti megvalósítása: szórási kísérletek

→ szórás elmélet (Scattering-theory)

+

klasszikus tárgyalás
kísérleti aspektusok
kvantumos tárgyalás

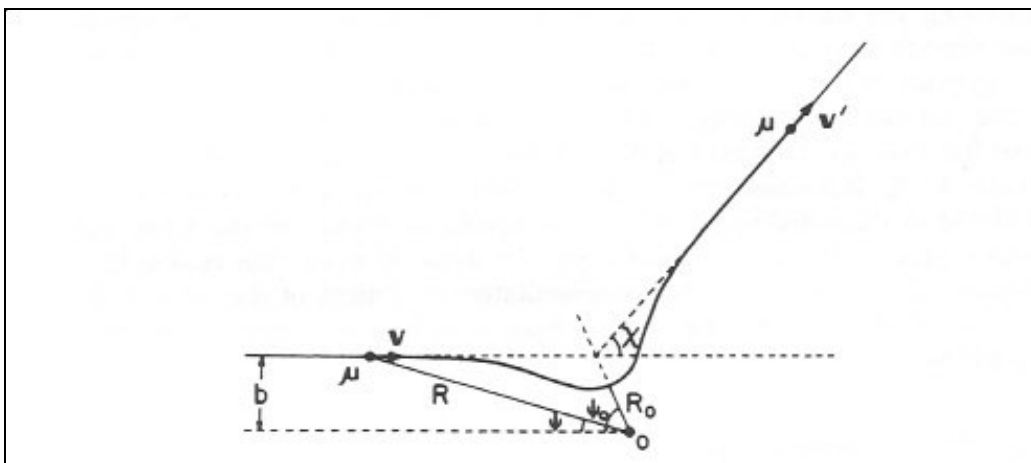
Alapvető fogalmak, feltételezések:

1) 2 részecske ütközése

→ tkp. rendszerben, μ tömeg mozgása

→ $V(R)$ → gömbszimmetrikus potenciál

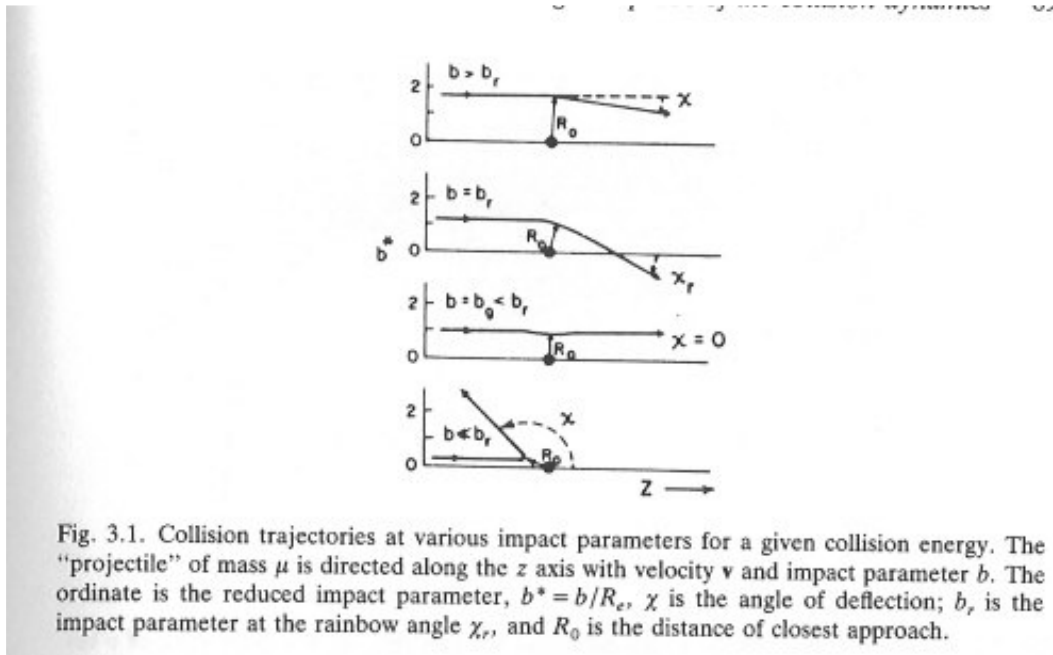
2) Szórás geometriája



Az eltérítési szög: $\chi = \pi - 2\varphi_0$

3) $V(R)$ tulajdonságai → taszító + vonzó kölcsönhatások

4) Ütközési trajektóriák $b^* = \frac{b}{R_e}$ (redukált ütközési paraméter)



a) $b^* > b_r$

b_r a legnagyobb negatív eltérítéshez tartozó szög: szivárványszög)



$V(R)$ vonzó $\chi < 0$

b) $b^* = b_r$

$\chi = \chi_r$ szivárványszög

c) $b^* = b_g$

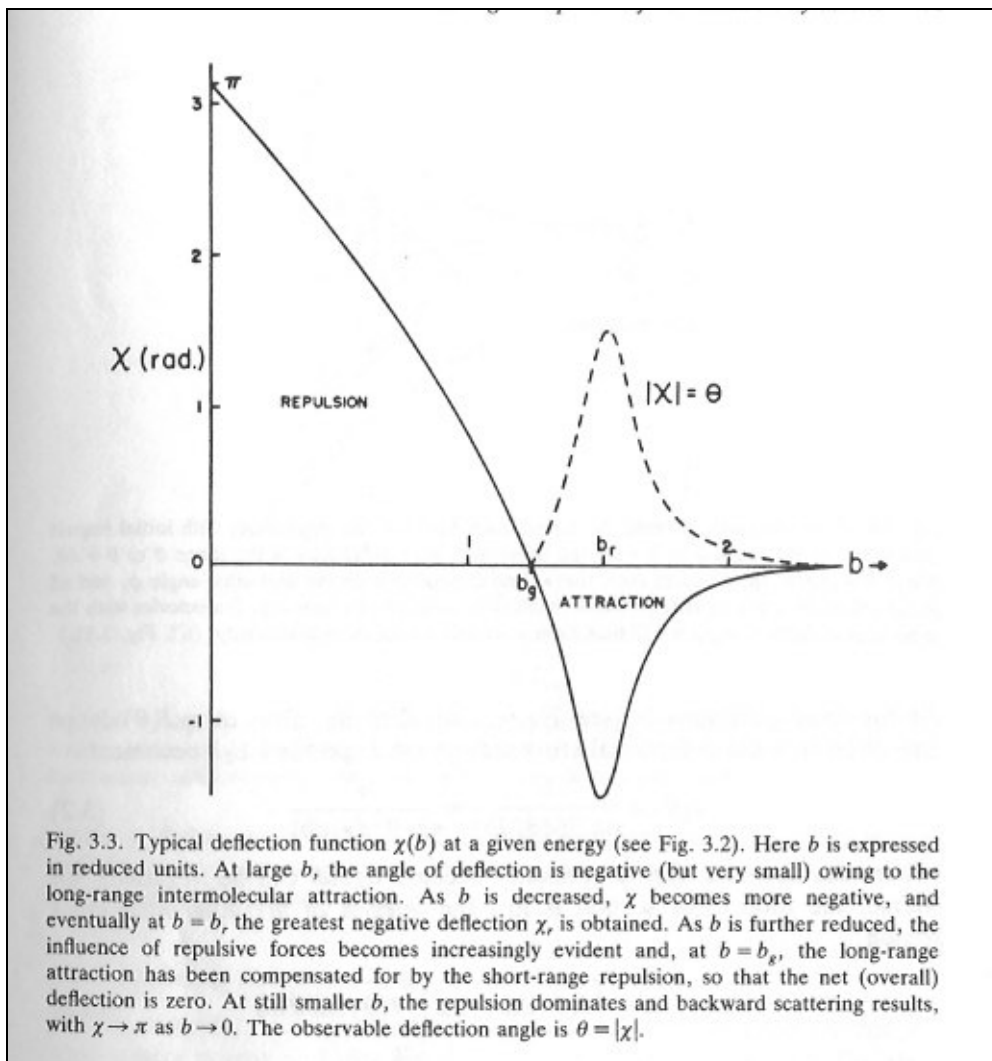
$\chi = 0 \Rightarrow$ vonzó és taszító potenciál egyensúlya
 b_g : glória ütközési paraméter!

d) $b^* \ll b_r$

$\chi > 0 \Rightarrow$ visszaszórás lép fel

5) $b = 0$ tengely körülötti hengersizmetria $\Rightarrow \chi$ előjelének nincs értelme \Rightarrow észlelhető szög: $\Theta = |\chi|$

6) adott E_T -re, χ és Θ b -függése



- a) $b > b_g \rightarrow$ vonzás dominál
 $b < b_g \rightarrow$ taszítás dominál

- b) ha $\chi > |\chi_r| \Rightarrow$ egyértelmű kapcsolat van b és χ között
 ha $\chi \leq |\chi_r| \Rightarrow$ egy mérhető Θ -hoz 3 b érték is tartozhat!!!

Megjegyzés: tisztán taszító potenciálra nem jelentkezik többértékűség!

Szórás-elmélet: klasszikus leírás

Trajektóriák

- trajektóriák b és $b+db$ között $\rightarrow \Theta$ és $\Theta+d\Theta$ közötti eltérést szenvednek

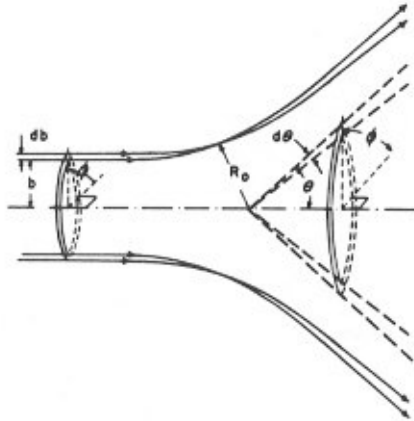


Fig. 3.4. A construction showing the equivalence between the trajectories with initial impact parameters in the range b to $b + db$ and those with final deflections in the range θ to $\theta + d\theta$, where $\theta = |\chi(b)|$. In the usual case, there is no dependence on the azimuthal angle ϕ , and all initial values of ϕ are equally probable, leading to cylindrical symmetry. Trajectories with the same final deflection angle θ will thus form a scattered cone of equi-intensity. (Cf. Fig. 2.11.)

- nincs ϕ függés
 $\rightarrow d\omega$ térszögű, 2 kör által határolt térben fognak ezek a trajektóriák kilépni (körgyűrű)

$$\rightarrow d\omega = 2\pi \sin\Theta d\Theta$$

\rightarrow Térszög: a térnek az a része, amelyet egy pontból kiinduló, az illető pontot egy zárt görbe összes pontjaival összekötő félegyenesek határolnak. A térszög nagyságát a csúcsból mint középpontból felvett egységnyi sugarú gömbfelületnek a térszögön belül eső területével mérjük.

$\rightarrow \Theta$: kúp nyílásszöge (ϕ függés nincs)

$$F \Rightarrow R = 1 \Rightarrow (R \cdot \sin\Theta \cdot 2\pi) \cdot d\Theta = 2\pi \sin\Theta d\Theta = d\omega$$

Szórt részecskék száma

→ $dN(\Theta) \Rightarrow \Theta$ és $d\Theta$ közé szórt részecskék száma
egységnyi „ t ” alatt

$dN(\Theta) \sim F_i \cdot d\omega \rightarrow F_i$: szórás előtti részecske fluxus (i :
incident, beeső)

$dN(\Theta) = I(\Theta)F_i d\omega \Rightarrow I(\Theta)$ differenciális
hatáskeresztmetszet

Általánosítható $I(\Theta, \varphi)$ -re!!! (ekkor egy kis felületű
detektor észleli a szórást!)

Pontosítás: $d\dot{N}(\Theta) = I(\Theta)F_i d\omega$

\dot{N} idő szerinti mennyiség megváltozása
 F_i -ben van benne az egységnyi időre történő
vonatkoztatás
↓
egy szóró molekulára vonatkozik

→ tudjuk, hogy b és $b+db$ közötti részecskék (feltételezve,
hogy egy Θ kilépési szöghöz egy b tartozik) száma
megegyezik a Θ és $\Theta+d\Theta$ kilépő részecskék számával.

Ezért: $F_i 2\pi b db = I(\Theta) \cdot 2\pi \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot F_i$

↓
 $2\pi b db = I(\Theta) \cdot 2\pi \sin\Theta d\Theta$ [ezért $d\sigma = I(\Theta) \cdot d\omega$]

$$I(\Theta) = \frac{b}{\sin\Theta \cdot \left(\frac{d\Theta}{db}\right)} = \frac{b}{\sin\Theta \cdot \left|\frac{d\chi}{db}\right|}$$

szórás szögeloszlása! (és Θ - b függvény is)

→ teljes ütkötési hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \int d\sigma = \int I(\Theta) d\omega = 2\pi \int_0^\pi I(\Theta) \sin \Theta d\Theta$$

teljesen általánosan:

$$\sigma = \int I(\Theta, \varphi) \cdot d\omega$$

→ $I(\Theta)$ kísérletből extrahálható

→ ha $\chi(b)$ -t ismernénk $I(\Theta)$ -t számolhatnánk!

→ Többértékű $\Theta(b)$ függvényre:
$$I(\Theta) = \sum_i \frac{b_i}{\sin \Theta \left(\frac{d\Theta}{db_i} \right)}$$

Szórás-elmélet: klaszikus leírás – gyakorlati aspektusok

Szórás – potenciál kapcsolat

1) Kvalitatív infó:

- potenciál vonzó része = kis szögű szórás (nagy b)
- taszító rész = nagy szögű szórás (kis b)

2) Kvantitatív információ $V(R)$ és $\chi(b)$ kapcsolatára (φ - R függésén keresztül...)

→ R vektor szögsebessége: $\dot{\varphi} = \frac{bv}{R^2} = \frac{d\varphi}{dt}$ (impulzusnyomaték megmaradásából)

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{dR} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dR}{dt}} \quad \left(\frac{d\varphi}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \right) \text{ láncszabály} \quad ! \varphi = \varphi(R(t))!$$

$$\rightarrow E_T \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right) = \frac{1}{2} \mu \dot{R}^2 + V(R) \quad \left[T^{cf} = \frac{1}{2} \mu R^2 \dot{\varphi}^2, \quad T^r = \frac{1}{2} \mu \dot{R}^2 \right]$$

$$E_T \left(1 - \frac{b^2}{R^2} \right) - V(R) = \frac{1}{2} \mu \dot{R}^2 \quad \left(E_T = \frac{1}{2} \mu v^2 \right)$$

$$v \left(1 - \frac{b^2}{R^2} - \frac{V(R)}{E_T} \right)^{\frac{1}{2}} = \dot{R}$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{dR} = -\frac{b}{R^2} \left(1 - \frac{V(R)}{E_T} - \frac{b^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Negatív előjel: $\varphi = 0$ ha $R = \infty$
 φ nő ha R csökken

Integrálás $R = \infty$ $\varphi = 0$ értéktől a klasszikus fordulási pontig
 ($R = R_0$, $\varphi = \varphi_0$):

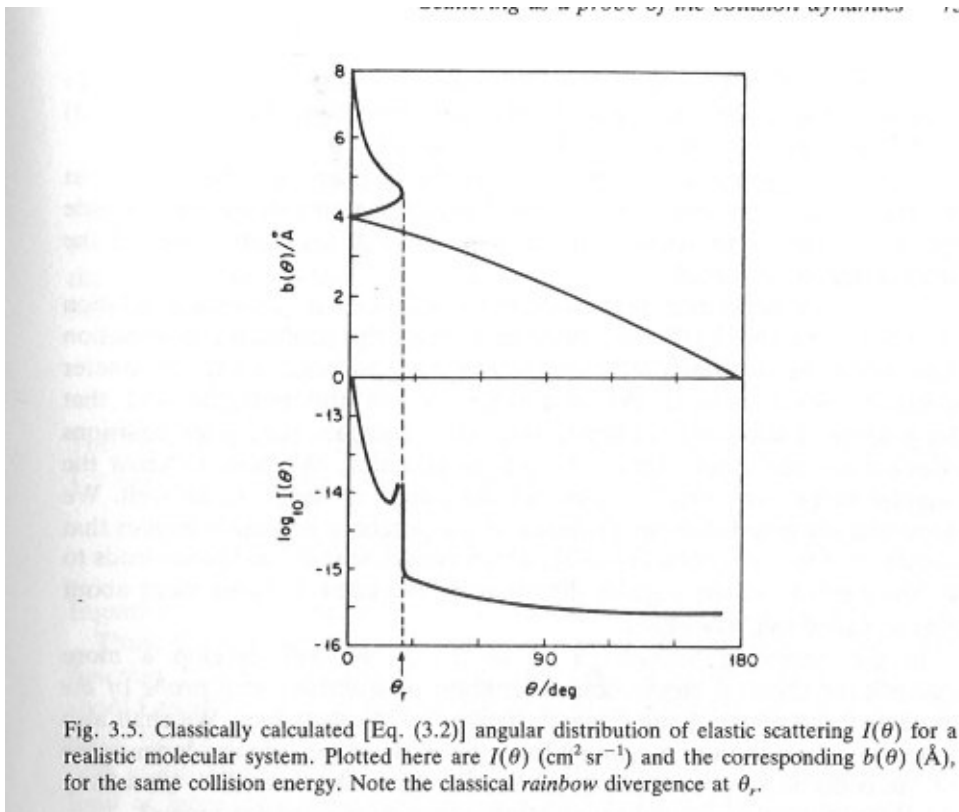
$$\int_{\infty}^{R_0} \frac{d\varphi}{dR} dR = \varphi_0 = b \int_{R_0}^{\infty} \frac{dR}{R^2} \left(1 - \frac{V(R)}{E_T} - \frac{b^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

→ Mivel $\chi = \pi - 2\varphi_0 \Rightarrow$ közvetlen kapcsolat $\chi(b)$ és $V(R)$ között!

Bármely energiára tehát:

$V(R)$ -ből $\rightarrow \chi(b)$ számítható!

3) $V(R) \rightarrow \chi(b) \rightarrow I(\Theta) \Rightarrow$ klasszikus $I(\Theta)$ szórási eloszlások
 (realisztikus potenciálokra!)



Fontos észreveendő (I):

tkp. rendszer $I(\Theta) \rightarrow$ transzformáció kell kísérleti $I(\vartheta)$ -hoz!

Fontos észreveendő(II):

1) divergencia $\Theta = 0 \rightarrow$ nagy b értékekre

2) divergencia a glória impakt paraméternél
($\chi(b_g) = 0 \Rightarrow \sin\Theta = 0$)

3) divergencia a szivárvány ütközési

paraméternél: $\frac{d\chi}{db} = 0$

\Rightarrow klasszikus kezelés következményei

\Rightarrow kvantum kezelés \Rightarrow véges érték

\Downarrow

így is fontos $V(R)$ jellemzése

Fontos észreveendő (III):

inverziós probléma sokkal bonyolultabb, azzal most nem fogunk foglalkozni...

Áttérés tkp koordináta rendszerből laboratóriumi koordináta rendszerre (vagy inkább fordítva...)

ϑ és Θ két különböző koordinátát jelent a laborban. $I'(\vartheta)$ és $I(\Theta)$ a diff. hatáskeresztmetszet fv.-t írják le ennek a két különböző koordinátának a fv.-ben.



Laborban észlelt: ϑ

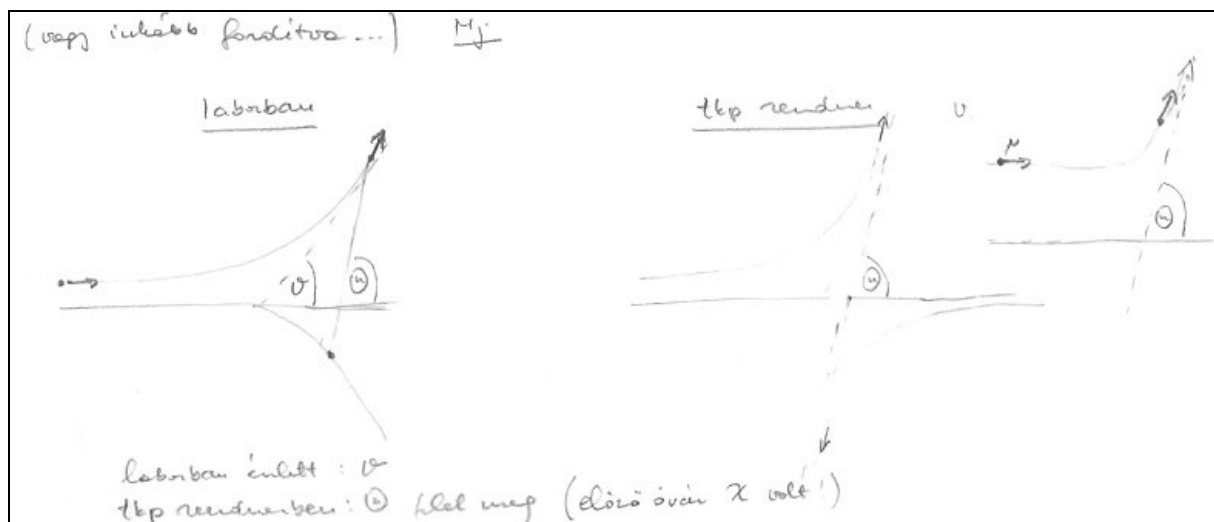
Tkp rendszerben: Θ felel meg (előző órán χ volt!)



$I'(\vartheta)$ és $I(\Theta)$ funkcionális formája ezért különböző lesz!

laborban

tkp rendszer



$$\mathbf{r}_{lab} = \mathbf{R}_{tkp} + \mathbf{r}_{tkp} \quad \mathbf{v}_{lab} = \mathbf{V}_{tkp} + \mathbf{v}_{tkp}$$

\mathbf{r}_{tkp} , \mathbf{v}_{tkp} : ütköző részecske \mathbf{r} -je és \mathbf{v} -je a tkp. rendszerben.

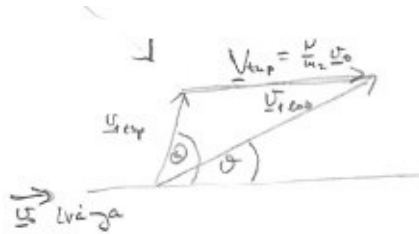
Legyen $\mathbf{v}_{0,lab}$ a kezdeti beesési sebesség, cél áll.

Impulzus megmaradás miatt:

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V}_{tkp} = m_1\mathbf{v}_0 \quad \text{ebből}$$

$$\mathbf{V}_{tkp} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_0 = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{v}_0 \quad (\#1)$$

\downarrow \downarrow
 ütk. utáni kezdeti impulzus
 impulzus
 (de ütközés előtt is!)



Ütközés utáni sebességek és szögek: $\mathbf{V}_{tkp} \parallel \mathbf{v}_0$

Ezért: $v_{lab} \sin \vartheta = v_{tkp} \sin \Theta$

$$v_{lab} \cos \vartheta = v_{tkp} \cos \Theta + V_{tkp} \quad (\#2)$$

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \rho} \quad \text{ahol } \rho = \frac{\mu v_0}{m_2 v_{1tkp}} \leftarrow v_{1,tkp} \text{ nem ismert}$$

tkp.-ről tudjuk, hogy

$$r_{1,tkp} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} r_{12} \Rightarrow v_{1tkp} = \frac{\mu}{m_1} v_{12}$$

(\mathbf{r}_{12} , \mathbf{v}_{12} relatív helyzet vektorok és sebességek)

ezért

$$\rho = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{v_0}{v} \quad v: \text{ relatív sebesség ütközés után}$$

rugalmas ütközésre így: $\rho = \frac{m_1}{m_2} \quad (v_0 = v)$

ezért

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \Theta}{\cos \Theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

→ alternatív ϑ - Θ kapcsolat

$$\text{cosinus-tétel: } v_{1lab}^2 = v_{1tkp}^2 + V^2 + 2v_{1tkp}V \cos \Theta \quad (\#3)$$
$$(\cos \Theta = -\cos(\pi - \Theta))$$

(használva az előző $\cos \vartheta$ - $\cos \Theta$ összefüggés, azaz (#3) és (#1) helyettesítése (#2)-be)

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \Theta + \rho}{(1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2)^{1/2}} \quad (\#4)$$

→ végső cél: $I(\Theta)$ és $I'(\vartheta)$ kapcsolata

vezérlőelv: ld. Θ -t és ϑ összekötő ábra

↓

a tkp rendszerben Θ és $\Theta + d\Theta$ közé szórt részecskék száma megegyezik a laborban ϑ és $\vartheta + d\vartheta$ közé szórt részecskékével:

$$2\pi F_i I(\Theta) \sin \Theta |d\Theta| = 2\pi F_i I'(\vartheta) \sin \vartheta |d\vartheta|$$

$$I'(\vartheta) = I(\Theta) \cdot \frac{\sin \Theta |d\Theta|}{\sin \vartheta |d\vartheta|} = I(\Theta) \left| \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \vartheta)} \right|$$

absz. érték: Θ itt az elhajlítás szöge ugyanúgy mint régebben χ volt!

Használva az előző (#4) összefüggést

$$I'(\vartheta) = I(\Theta) \frac{(1 + 2\rho \cos \Theta + \rho^2)^{3/2}}{1 + \rho \cos \Theta}$$

Egyszerű példa: azonos részecskék rugalmas ütközése: $\rho = 1$

$$\cos \vartheta = \left(\frac{1 + \cos \Theta}{2} \right)^{1/2} = \cos \frac{\Theta}{2}$$

↓

$$\vartheta = \frac{\Theta}{2}$$

Így

$$I'(\vartheta) = 4 \cos \vartheta \cdot I(\Theta)$$