# Integrális szórási egyenlet I.

⇒ Schrödinger-egyenlet és az aszimptotikus határfeltételek egy egyenletbe építése a cél

⇒ módszer: Green-függvény módszer

→ tulajdonképpen megmutatjuk a stacionárius állapotok létét egy precízebb kezeléssel… (hiszen előbb nem mutattuk meg …)

## Green-függvény módszer

→ átalakított Schrödinger-egyenlet:

$$(\Delta + k^2)\cdot\Phi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\cdot\Phi(\mathbf{r})$$

→ Feltételezzük, hogy létezik egy G($\mathbf{r}$) függvény, amire

$$(\Delta + k^2)\cdot G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

→ G($\mathbf{r}$) a $(\Delta + k^2)$ operátor Green-függvénye

→ δ($\mathbf{r}$) Dirac δ függvény.

Definíció:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \quad \text{v.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) f(x) = f(0)$$

Néhány fv.:

$$\frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$ → ha ε → 0 a pozitív oldalról

14.3 A Dirac $\delta$-function can be
[reg]arded as the limit of a rectangular
[func]tion that shrinks in width and
[incr]eases in height in such a way as to
[pres]erve unit area.

Ha kell tulajdonság, felhasználjuk majd!

## Állítás

→ Bármely függvény ami kielégíti

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}')d^3r'$$

egyenletet, megoldása a fenti diff-egyenletnek (Schrödinger-egyenlet!) is!

→ $\Phi_0$(r) a homogén egyenlet megoldása, azaz:

$$(\Delta + k^2)\cdot\Phi_0(\mathbf{r}) = 0$$

(az inhomogén és homogén egyenlet lineáris kombinációja lesz a diff. egyenlet ált. megoldás!)

## Bizonyítás

→ Alkalmazzuk $\Delta + k^2$ operátort az integrális egyenletre:

$$(\Delta + k^2)\Phi(\mathbf{r}) = (\Delta + k^2)\int d^3r' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}')$$

(homogén egyenlet megoldása máris kiesik)

→ feltéve ha bevihető (csak **r**-re hat az operátor)

$$(\Delta + k^2)\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r'\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})$$

Q.E.D

(ez fordítva is belátható, azaz bármely megoldása a Schrödinger-egyenletnek kielégíti az integrális egyenletet)

→ Mit csináltunk? Differenciál egyenlet → integrál egyenlet

→ Integrál egyenlet előnye: az aszimptotikus viselkedés beépíthető megfelelően választott Green- függvény segítségével!

⇒ „könnyen” belátható, hogy a

$$G_{\pm}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

függvény megoldása a Green-függvény definiáló egyenletének!

## Kimenő és bemenő Green-függvények

$$\Delta G_+ = \nabla^2 G_+ = \nabla(\nabla G_+) = \nabla\cdot\left\{\frac{1}{r}\nabla(e^{ikr})\right\} + \nabla\cdot\left\{e^{ikr}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right\} =$$
$$= \frac{1}{r}\nabla^2 e^{ikr} + e^{ikr}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) + 2\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\nabla(e^{ikr})$$

Standard tulajdonságok:

| | |
|---|---|
| $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ | vektor |
| $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ | vektor |
| $\nabla \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}$ | skalár |
| $\nabla \mathbf{r} = 3$ | skalár |
| $\Delta \cdot \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ | skalár |

További lépések

$$\nabla e^{ikr} = ike^{ikr}\nabla r = ike^{ikr}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\nabla^2 e^{ikr} = \nabla\left(\frac{ik\mathbf{r}\cdot e^{ikr}}{r}\right) = \frac{ik\mathbf{r}\nabla e^{ikr}}{r} + ike^{ikr}\nabla\frac{\mathbf{r}}{r} == -k^2 e^{ikr} + \frac{2ike^{ikr}}{r}$$

Az eredmény:

$$\Delta G_+ = -\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{k^2 e^{ikr}}{r} + \frac{2ike^{ikr}}{r^2} + e^{ikr}(-4\pi\delta(\mathbf{r})) - 2\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{ike^{ikr}}{r}\mathbf{r}\right)$$

$$\Delta G_+ = -k^2 G_+ + e^{ikr}\delta(\mathbf{r})$$

$e^{ikr}\delta(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ (csak r = 0-nál nem tűnik el $\delta(\mathbf{r})$)

Így:

$$(\Delta + k^2)G_+ = \delta(r)$$